Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Πέμπτη 9 Ιουλίου 2020

Μέρος Α : Πολλαπλές επιλογές - Σύντομες απαντήσεις

Για καθένα από τα θέματα να επιλεγεί μια σωστή απάντηση και να αιτιολογηθεί.

1. Για την εξίσωση : $y'' + ay' + b^2y = te^{-2t}$, $t \geq 0$ με $a, b \in \mathbb{R}, a > 2|b| > 0$, ισχύει ότι:

A) Όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν για $x \to +\infty$.

B) Υπάρχει ταλαντούμενη λύση.

C) Υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις.

D) Όλες οι λύσεις είναι φραγμένες **E)** Κανένα από τα προηγούμενα.

2. Για την εξίσωση: $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$, ισχύει ότι:

A) Όλες οι λύσεις είναι θετικές.

B) Υπάρχει λύση με $y(AM) = 2020$.

C) Υπάρχει λύση με $y(2020) = AM$.

D) Όλες οι λύσεις είναι φραγμένες. **E)** Κανένα από τα προηγούμενα.

3. Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών: $y'' + y = x$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) - y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, ισχύει ότι:

A) Έχει ακριβώς μία λύση.

B) Έχει ακριβώς δύο λύσεις

C) Έχει άπειρες λύσεις.

D) Δεν έχει λύση. **E)** Κανένα από τα προηγούμενα.

4. Για το π.α.τ. $y'(x) = f(x)g(y)$, $y(x_0) = 5$, με $f : [x_0 - 3, x_0 + 3] \to \mathbb{R}$, $g : [1, \infty) \to [1, \infty)$ συνεχείς, ισχύει ότι:

A) Έχει ακριβώς μία λύση στο $[x_0 - 3, x_0 + 3]$.

B) Είναι δυνατόν να έχει περισσότερες από μία λύσεις.

C) Είναι δυνατόν να μην έχει λύση.

D) Έχει λύση αλλά το μονοσήμαντο εξαρτάται από τις f, g. **E)** Κανένα από τα προηγούμενα.

5. Αν για την επίλυση μιας ομογενούς γ.δ.ε. δεύτερης τάξης με την μέθοδο των δυναμοσειρών γύρω από το ομαλό σημείο $x_0 = 0$ είναι $c_{n+2} = -\frac{(0,5-n)n}{(n+1)(n+2)}c_n, n \geq 0$, και $R = 11$, τότε:

A) Υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων $\{y_1, y_2\}$ με y_1, y_2 ορθογώνιες στο $[-1/2, 1/2]$.

B) Για κάθε βασικό σύνολο λύσεων $\{y_1, y_2\}$ οι y_1, y_2 είναι ορθογώνιες στο $[-1/2, 1/2]$.

C) Η ύπαρξη ορθογώνιων λύσεων εξαρτάται από τους συντελεστές της εξίσωσης.

D) Υπάρχει σύνολο δυο ορθογώνιων λύσεων αλλά δεν είναι βασικό.

E) Κανένα από τα προηγούμενα.

6. Αν για την ορίζουσα Wronski W_0 ενός συνόλου λύσεων μιας ομογενούς γ.δ.ε. n-τάξης είναι γνωστό ότι $W_0(x) = AM, x \in \mathbb{R}$, τότε:

A) Υπάρχει σύνολο n-λύσεων με ορίζουσα Wronski W με $W(AM) = AM, W(2020) = 2020$.

B) Υπάρχει σύνολο n-λύσεων με ορίζουσα Wronski W με $W(AM)W(2020) = 2020 - AM$.

C) Η συνάρτηση $W_0(x), x \in \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο αλλά όχι μέγιστο.

D) Υπάρχει σύνολο n-λύσεων με μη φραγμένη ορίζουσα Wronski.

E) Κανένα από τα προηγούμενα.

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Πέμπτη 9 Ιουλίου 2020

Μέρος Β: Θέματα πλήρους ανάπτυξης

1. Θεωρούμε την ομογενή γ.δ.ε. τρίτης τάξης

$$y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0, \quad x \in I \tag{E}$$

με $p, q, r \in C(I)$ και I διάστημα της πραγματικής ευθείας. Αν οι συναρτήσεις y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της (Ε) τέτοιες ώστε

$$y_1(x) \neq 0, \quad (y_2/y_1)'(x) \neq 0, \quad x \in I,$$

να επιλυθεί η εξίσωση με αναγωγή της σε μια ομογενή γ.δ.ε. πρώτης τάξης.

2. Δίνεται η πρώτης τάξης γ.δ.ε.

$$y'(x) - a(x)y(x) = b(x), \quad x \geq 0, \tag{E}$$

με $a, b \in C([0,\infty))$, και b φραγμένη στο $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι:
i) Αν $a(x) \leq 1, x \geq 0$ τότε κάθε λύση της (Ε) είναι φραγμένη.
ii) Αν $a(x) \geq 1, x \geq 0$ τότε η μοναδική φραγμένη λύση της εξίσωσης (Ε) δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = -\int_x^{+\infty} b(s) exp\Big[\int_s^x a(t)dt\Big] ds, \quad x \geq 0.$$